donc $\lim\limits_{x\to 0} f_m(x) = 0 \cdot m = 0 = f_m(0)$ d'où f_m est continue en 0.

Conclusion : f_m est continue sur $\mathbf{R}$.

3°/ $\forall x \in \mathbf{R}$, $-1 \le \sin(mx^2) \le 1$ donc pour tout $x < 0$ on a :

$\frac{1}{x} \le f_m(x) \le \frac{-1}{x}$ et comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-1}{x} = 0$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x) = 0$.

• $\forall\, x > 0$, $\frac{-1}{x} \le f_m(x) \le \frac{1}{x}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = 0$.

Solution 8 :

1°/ $D_{f_m} = \{ x \in \mathbf{R} \text{ tel que } x^2 - m \ge 0 \}$

(*) $x^2 - m = 0 \Leftrightarrow x^2 = m$.

• Si $m > 0$ (*) admet deux solutions $x' = \sqrt{m}$ et $x'' = -\sqrt{m}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{m}$		$\sqrt{m}$		$+\infty$
$x^2 - m$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D_{f_m} =]-\infty, -\sqrt{m}] \cup [\sqrt{m}, +\infty[$.

• Si $m < 0$: $x^2 - m > 0$; $D_{f_m} = \mathbf{R}$.

2°/ $\lim\limits_{x\to-\infty} m\sqrt{x^2 - m} + 2x = \lim\limits_{x\to-\infty} m|x|\sqrt{1 - \frac{m}{x^2}} + 2x$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} x(-m\sqrt{1 - \frac{m}{x^2}} + 2)$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} x = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} -m\sqrt{1 - \frac{m}{x^2}} + 2 = -m + 2$

m	$-\infty$		2		$+\infty$
$-m+2$		$+$	0	$-$	

– Si $m < 2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x) = +\infty$

– Si $m > 2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x) = -\infty$